**Простейшие тригонометрические уравнения**

В настоящее время в школьном курсе математики не существует отдельной дисциплины, изучающей тригонометрию и весь учебный материал, распределён между курсами алгебры, геометрии и начал анализа. Материал, относящийся к тригонометрии, изучается в течении нескольких лет отдельными блоками, поэтому учащиеся не представляют себе весь сектор применения пройденного материала.

Исторически сложилось, что тригонометрическим уравнениям уделялось особое место в школьном курсе. Стоит отметить, что решение тригонометрических уравнений создаёт предпосылки для систематизации знаний обучающихся, связанных со всем учебным материалом по тригонометрии, а также даёт возможность установить действенные связи с изученным материалом по алгебре (уравнения, равносильность уравнений, тождественные преобразования алгебраических выражений и т.д.).

Пусть $a$ — некоторое число. Простейшие тригонометрические уравнения — это уравнения видов: $sin\ x = a$, $cos\ x = a$, $tg\ x = a$, $ctg\ x = a$. Решить простейшее тригонометрическое уравнение — это значит описать множество значений переменной $x$, для которых данная тригонометрическая функция принимает заданное значение $a$ [8].

Простейшие тригонометрические уравнения мы будем решать с помощью тригонометрической окружности. Стоит отметить, что решение любого тригонометрического уравнения сводится, как правило, к решению одного или нескольких простейших тригонометрических уравнений, поэтому успешное освоение данного вида уравнений позволяет ученику лучше изучить данную тему.

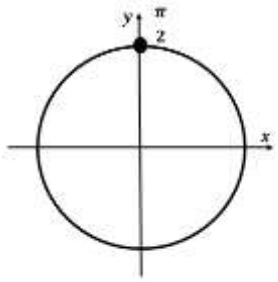
<u>Уравнение $sin\ x = a$</u>

Для решения уравнения $sin\,x = a$ достаточно знать определения: $sin\ x$ — это ордината точки $x$ тригонометрической окружности, которая отвечает углу $x$. Поскольку синус не может принимать значений, по модулю превосходящих единицу, необходимо помнить, что при $a > 1$ или $a < -1$ уравнение не имеет решений. Если же $|a| \leq 1$, то уравнение имеет бесконечное множество решений [3].

Пример 1. Решите уравнение: $sin\, x = 1$.

(Отметим, что это простейшее тригонометрические уравнение, в правой части которого стоит табличное значение синуса.)

На тригонометрической окружности имеется единственная точка с ординатой 1:

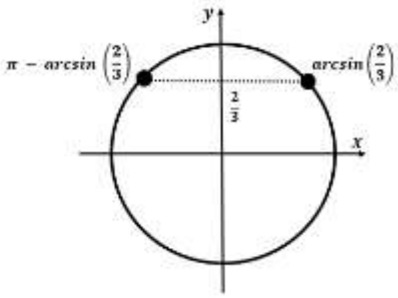



Эта точка соответствует углу $\frac{\pi}{2}$ и всем углам, отличающихся от $\frac{\pi}{2}$ на несколько полных оборотов в обе стороны. Следовательно, все решения уравнения описываются простой формулой: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z + 2\pi n, n \in Z$.

Пример 2. Решите уравнение: $sin\, x = 2/3$.

(Отметим, что это простейшее тригонометрические уравнение, в правой части которого стоит не табличное значение синуса.)

На тригонометрической окружности имеем горизонтальную пару точек с ординатой 2/3:




Правая точка отвечает углу $arcsin\ 2/3,$ левая – углу $\pi - \ arcsin\ 2/3$ и всем углам, отличающихся от данных на несколько полных оборотов в обе стороны.

*Для описания множества углов, отвечающих одной точке тригонометрической окружности, нужно взять какой-либо один угол из этого множества и прибавить 2πn.*

Записываем решения данного уравнения в виде совокупности: $\left[\begin{array}{l} x = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + 2\pi n, \\ x = \pi - arcsin\ \left(\frac{2}{3}\right) + 2\pi n, n \in Z. \end{array}\right.$

или с помощью объединяющий формулы: $x \ = \ (-1)^k arcsin\ (\frac{2}{3}) + \pi k, k \in Z.$

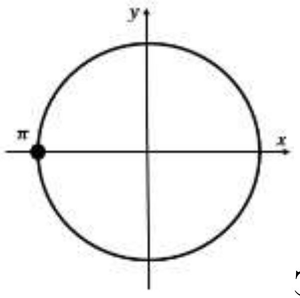
<u>Уравнение $cos\ x = a$</u>

Для решения уравнения $cos\ x = a$ достаточно знать определения: $cos\ x$ — это абсцисса точки $x$ тригонометрической окружности, которая отвечает углу $x$. Поскольку косинус не может принимать значений, по модулю превосходящих единицу, то при $a\ >\ 1$ или $a\ <\ -1$ уравнение не имеет решений. Если же $|a|\ \le\ 1,$ то уравнение имеет бесконечное множество решений [8].

Пример 3. Решить уравнение: $cos\ x = -1.$

(Отметим, что это простейшее тригонометрические уравнение, в правой части которого стоит табличное значение косинуса.)

На тригонометрической окружности имеется лишь одна точка с абсциссой −1:

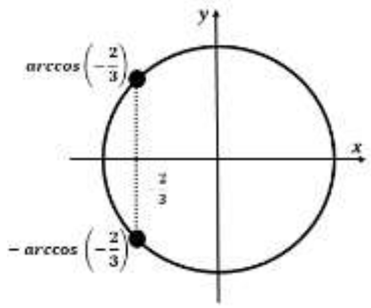



Эта точка соответствует углу $\pi$ и всем углам, отличающихся от $\pi$ на несколько полных оборотов в обе стороны, то есть на целое число полных углов. Следовательно, все решения уравнения $cos\, x = -1$ записываются формулой: $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$.

Пример 4. Решите уравнение: $cos\, x = -2/3$.

(Отметим, что это простейшее тригонометрические уравнение, в правой части которого стоит не табличное значение косинуса.)

Имеем вертикальную пару точек с абсциссой $-2/3$:

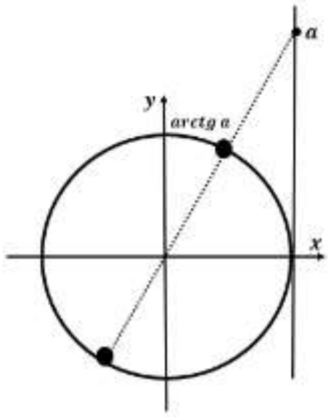



Записываем ответ: $x = \pm\, arccos\,(-\frac{2}{3}) + \pi n, n \in Z$.

Напомним, что арккосинус не является ни чётной, ни нечётной функцией, поэтому знак минус у аргумента арккосинуса так и оставляем. При желании можно воспользоваться соотношением: $arccos\left(-\frac{2}{3}\right) = \pi - arccos\,\frac{2}{3}$.

<u>Уравнение *tg x = a*</u>

Вспомним, что тангенс может принимать любые значения (область значений функции $y = tg\, x$ есть всё множество $R$). Значит, уравнение $tg\, x = a$ имеет решения при любом $a$ [3].



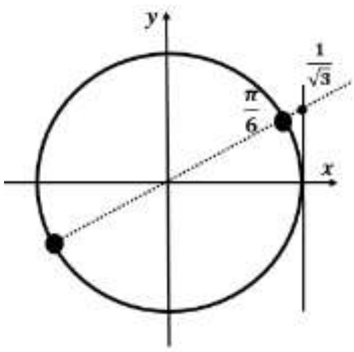

$x = arctg\ a + \pi n, n \in Z.$

Пример 5. Решите уравнение: *tg x = 0.*

Мы можем преобразовать данное уравнение к виду *sin x / cos x = 0*. Данное уравнение равносильно уравнению *sin x = 0.* Его решения имеют вид: $x = \pi n, n \in Z.$

Пример 6. Решите уравнение: *tg x* = $1/\sqrt{3}$.

Изображаем на тригонометрической окружности линию тангенсов. Имеем диаметральную пару точек:




Записываем ответ: $x = \pi/6 + \pi n, n \in Z.$

<u>Уравнение *ctg x = a*</u>

Уравнение $ctg\ x = a$ можно не рассматривать отдельно, поскольку [8]:

- уравнение *ctg x = 0*, будучи записано в виде $cos\ x/sin\ x = 0$, равносильно уравнению *cos x = 0,* и потому имеет решения $x = \pi/2 + \pi n, n \in Z$;
- при *a ≠ 0* уравнение *ctg x = a* равносильно уравнению *tg x* = 1/a, и потому имеет решения $x = arctg\left(\frac{1}{a}\right) + \pi n, n \in Z.$

### 1.1.2. Метод разложения левой части уравнения на множители

Предположим, что в правой части уравнения стоит нуль, а левую часть удаётся разложить на множители, используя такие способы как: вынесение за скобки общего множителя, группировка применения формул сокращенного умножения и искусственные приемы. Тогда решение уравнения упрощается: если произведение равно нулю, то хотя бы один из множителей равен нулю, и мы последовательно рассматриваем случаи равенства нулю каждого из множителей.

Задача 1. Решить уравнение: $2\,cos2\,x + cos\,x = 0$.

*Решение.* Выносим $cos\,x$ за скобки:

$cos\,x(2\,cos\,x\ +\ 1) = 0$.

Произведение двух множителей равно нулю — значит, хотя бы один из них равен нулю.

Первый случай: $cos\,x\ =\ 0\ \Leftrightarrow\ x\ =\ \pi/\,2\ +\ \pi n\ (n\ \in\ Z)$.

Второй случай: $2\,cos\,x + 1 = 0 \Leftrightarrow cos\,x = -\,1/\,2 \Leftrightarrow x = \pm\,2\pi/3 + 2\pi n\ (n \in Z)$.

*Ответ:* $\pi/\,2\ +\ \pi n, \pm\,2\pi/\,3\ +\ 2\pi n, n\ \in\ Z$.

Задача 2. Решить уравнение: $sin\,2x = 3\,sin\,x$.

*Решение.* Перепишем это уравнение, воспользовавшись формулой синуса двойного угла:

$2\,sin\,x\,cos\,x = 3\,sin\,x$.

Далее необходимо перенести всё в одну сторону и вынести общий множитель за скобки:

$2\,sin\,x\,cos\,x\ -\ 3\,sin\,x\ =\ 0\ \Leftrightarrow\ sin\,x\,(2\,cos\,x\ -\ 3)\ =\ 0$.

Первый случай: $sin\,x\ =\ 0\ \Leftrightarrow\ x\ =\ \pi n\ (n\ \in\ Z)$.

Второй случай: $2\cos x - 3 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 3/2$. Здесь решений нет: ведь $3/2 > 1$, а косинус не может принимать значений, больших единицы.

*Ответ:* $\pi n, n \in Z$.

### 1.1.3. Метод введения новой переменной

- Уравнения, сводящиеся к квадратным уравнениям.

Здесь мы рассмотрим примеры тригонометрических уравнений, которые можно преобразовать так, что они окажутся квадратными относительно некоторой тригонометрической функции.

Задача 1. Решить уравнение: $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$.

*Решение.* Это уравнение является квадратным относительно $\sin x$. Делаем замену $t = \sin x$, получаем квадратное уравнение относительно $t$: $2t^2 + 3t - 2 = 0$.

Решая его, находим: $t_1 = 1/2$; $t_2 = -2$.

Далее производим обратную замену:

$\sin x = 1/2 \Leftrightarrow x = \pi/6 + 2\pi n (n \in Z)$; или

$x = 5\pi/6 + 2\pi n\ (n \in Z)$;

$\sin x = -2 \Rightarrow$ решений нет.

*Ответ*: $\pi/6 + 2\pi n, 5\pi/6 + 2\pi n, n \in Z$.

Задача 2. Решить уравнение: $3\cos 2x - 8\cos x + 5 = 0$.

*Решение.* Здесь необходимо вспомнить формулу косинуса двойного угла, а именно $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

Подставляем её в уравнение: $3(2\cos^2 x - 1) - 8\cos x + 5 = 0$.

После преобразований получаем: $3\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$.

Делаем замену $t = \cos x$, решаем квадратное уравнение, производим обратную замену и находим:

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n \ (n \in Z)$;

$\cos x = 1/3 \Leftrightarrow x = \pm \arccos 1/3 + 2\pi n \ (n \in Z)$.

*Ответ:* $2\pi n, \pm \arccos 1/3 + 2\pi n, n \in Z$.

- Универсальная тригонометрическая подстановка $tg\frac{x}{2} = t$.

Так как *sin x, cos x, tg x и ctg x* можно выразить через $tg\left(\frac{x}{2}\right)$, то уравнение подстановкой $tg\left(\frac{x}{2}\right) = t$ можно свести к алгебраическому равнению.

$$\sin x = \frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \quad (1)$$

При этом, следует иметь в виду, что левые части формул *(1)* определены при всех *x*, а правые части не определены при $x = \pi + 2\pi n \ (n \in Z)$. Поэтому при применении универсальной тригонометрической подстановки необходимо дополнительно выяснить, являются или нет исключаемые из рассмотрения значения *x* корнями исходного уравнения.

Задача 3. Решить уравнение: $2 \sin x + \cos x + tg\, x/2 = 3$.

*Решение.* Непосредственно убеждаемся, что значения $x = \pi + 2\pi n$ не являются решениями данного уравнения. Применяем формулы (1), делаем подстановку $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\frac{4t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + t = 3 .$$

После преобразований приходим к уравнению вида:

$t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = 0$. Заметим, что $t = 1$ является корнем этого уравнения, в соответствии с чем совершаем следующие преобразования:

$0 = t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = t^3 - t^2 - 3t^2 + 3t + 2t - 2 = t^2(t-1) - 3t(t-1) + 2(t-1)$ $= = (t-1)(t^2 - 3t + 2) = (t-1)(t-1)(t-2) = (t-1)^2(t-2)$.

Вернемся к замене: $\left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = 2. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\ \frac{x}{2} = 1, \\ tg\ \frac{x}{2} = 2. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi/2 + 2\pi n, \\ x = 2\mathrm{arctg}2 + 2\pi n. \end{array}\right. n \in Z.$

*Ответ:* $\pi/2 + 2\pi n, 2\,arctg\,2 + 2\pi n, n \in Z$.

### 1.1.4. Метод введения вспомогательного аргумента

Рассмотрим уравнение $a\cos x + b\sin x = c$ (2), с ненулевыми числами $a$, $b$ и $c$. Если $a^2 + b^2 \neq 1$, то разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} sinx = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ (3).}$$

В результате этого деления сумма квадратов множителей при косинусе и синусе оказывается равной единице: $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$. Следовательно, существует угол $\alpha$ такой, что $cos\,x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $sin\,x = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Подставляя эти равенства в уравнение (3), получим:

$cos\ x \cdot cos\ \alpha + sin\ x \cdot sin\ \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Заметим, что левая часть уравнения — это формула косинуса разности, то есть получаем:

$cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Остаётся решить полученное уравнение и записать угол $\alpha$ в виде арккосинуса или арксинуса.

Задача 1. Решить уравнение: $3\,cos\,x - 4\,sin\,x = 2$.

*Решение.* Перед косинусом стоит множитель 3, перед синусом — множитель 4; разделим обе части на $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$:

$(3/5)\ cos\ x - (4/5)\ sin\ x = 2/5$. Поскольку $(3/5)^2\ (4/5)^2 = 1$, то существует угол $\alpha \in \left(0; \frac{\Pi}{2}\right)$ такой, что $cos\ \alpha = (3/5)$, $sin\ \alpha = (4/5)$. Имеем следовательно $cos(x + \alpha) = (2/5)$. Отсюда:

$x = -\alpha \pm arccos\,(2/5) + 2\pi n\ (n \in Z),$

или $x = -arcos\,(3/5) \pm arccos\,(2/5) + 2\pi n\ (n \in Z).$

*Ответ:* $x = -arccos\,(3/5) \pm arccos\,(2/5) + 2\pi n\ (n \in Z).$

### 1.1.5. Однородные уравнения 1-го и 2-го порядка и уравнения, сводящиеся к ним

Однородное тригонометрическое уравнение ***первой степени*** — это уравнение вида $a\ sin\ x + b\ cos\ x = 0$ с коэффициентами $a$ и $b$, не равными нулю [4].

При решении уравнений такого вида необходимо поделить его на $sin\ x$ или $cos\ x$. *(Сделаем оговорку, что $sin\ x \neq 0$ (или $cos\ x \neq 0$), поскольку на 0 делить нельзя.)* Тогда уравнение будет иметь вид $a + b{\cdot}ctg\ x = 0$ или $a{\cdot}tg\ x + b = 0$. Следовательно, уравнение сводится к простейшему.

Задача 1. Решить уравнение: $2\,sin\,x - 3\,cos\,x = 0.$

*Решение.* Разделим обе части уравнения почленно на $cos\ x$:

$2\ sin\ x - 3\ cos\ x = 0 \mid : cos\ x,$

$2\ tg\ x - 3 = 0$, выразим $tg\ x = 3/2$. Отсюда $x = arctg\,(3/2) + \pi n, n \in Z$.

*Ответ:* $arctg\,(3/2) + \pi n, n \in Z.$

Задача 2. Решить уравнение: $\frac{2\,sin\,x + 5\,cos\,x}{3\,sin\,x - 2\,cos\,x} = 4.$

*Решение.* Переносим 4 влево с минусом и приводим к общему знаменателю:

$\frac{2\sin x + 5\cos x}{3\sin x - 2\cos x} - \frac{4(3\sin x - 2\cos x)}{3\sin x - 2\cos x} = 0.$ После преобразований получаем:

$\frac{13\,cos\,x - 10\,sin\,x}{3\,sin\,x - 2\,cos\,x} = 0.$ (4)

Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель нулю не равен. Приравнивая к нулю числитель дроби (4), имеем:

$10 \sin x = 13 \cos x$. Делим на $\cos x \neq 0$ и получаем:

$tg\, x = 13/10$, откуда

$x = arctg\,(13/10) + \pi n$ ($n \in Z$).

Аналогично, знаменатель дроби (4) обращается в нуль при $tg\, x = 2/3$. Для полученных выше значений $x$ данное равенство не выполняется.

*Ответ:* $arctg\,(13/10) + \pi n, n \in Z$.

Однородное тригонометрическое уравнение ***второй степени*** — это уравнение вида $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ с некоторыми коэффициентами $a$, $b$, $c$. Чтобы решить уравнение этого вида , нужно разделить обе его части на $\cos^2 x$ (с соответствующей оговоркой). Тогда придём к квадратному уравнению относительно тангенса $a\, tg^2\, x + b\, tg\, x + c = 0$, которое можно решить методом подстановки. Если $a = 0$ или $c = 0$, то уравнение решается методом разложения на множители [8].

*Задача 3.* Решить уравнение: $\sin^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x - 4 \cos^2 x = 0$

*Решение.* Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$, сделав оговорку: *если* $\cos x = 0$, *то в силу уравнения имеем также* $\sin x = 0$. *Но это противоречит основному тригонометрическому тождеству* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, *согласно которому синус и косинус не могут обращаться в нуль одновременно. Значит, для любого решения данного уравнения выполнено неравенство* $\cos x \neq 0$, *и потому обе части уравнения можно разделить на* $\cos^2 x$. Разделив обе части данного уравнения на $\cos^2 x \neq 0$, приходим к квадратному уравнению относительно тангенса:

$tg^2\, x - 3\, tg\, x - 4 = 0$. Решая это уравнение, получаем:

$$tg\, x = -1 \Leftrightarrow x = \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi n\ (n \in Z);$$

$$tg\,x = 4 \Leftrightarrow x = arctg\,4 + \pi n\ (n \in Z).$$

*Ответ*: $(-\frac{\pi}{4}) + \pi n, arctg\,4 + \pi n, n \in Z.$

1.1.6. Решение уравнений с помощью тригонометрических формул

- Преобразование сумм в произведения.

В некоторых уравнениях используются формулы суммы/разности синусов/косинусов:

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ (5),

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ (6),

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ (7),

$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$ (8).

Задача 1. Решить уравнение: $sin\,x + sin\,3x = 0.$

*Решение*. Превращаем сумму синусов в произведение, формула (5):

$$2\,sin\,2x\,cos\,x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0, \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{2}, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k\ (n, k \in Z). \end{array}\right.$$

Заметим, что множество $\pi/2 + \pi k$ содержится в множестве $(\pi \cdot n)/2$. В самом деле, если $n = 2k + 1$, то

$$\frac{\pi n}{2} = \frac{\pi(2k+1)}{2} = \frac{\pi + 2\pi k}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

Это значит, что ответом является $(\pi \cdot n)/2$.

*Ответ:* $\frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

- Преобразование произведений в суммы.

Иногда при решении уравнений требуется совершить обратную операцию — перейти от произведения тригонометрических функций к их сумме или разности:

$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$ (9),

$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$ (10),

$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$ (11).

Задача 2. Решить уравнение: $3 + 2\,sin\,3x\,sin\,x = 3\,cos\,2x$.

*Решение.* Удвоенное произведение синусов — это разность косинусов, формула (10):

$$3 + cos\,2x - cos\,4x = 3\,cos\,2x \Leftrightarrow cos\,4x + 2\,cos\,2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\,cos^2\,2x - 1 + 2\,cos\,2x - 3 = 0 \Leftrightarrow cos^2\,2x + cos\,2x - 2 = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим:

$cos\,2x = 1 \Rightarrow x = \pi n\ (n \in Z)$,

$cos\,2x = -2 \Rightarrow$ *решений нет.*

*Ответ:* $\pi n, n \in Z$.

- Применение формул понижения степени.

В некоторых уравнениях нужно избавляться от квадратов синусов или косинусов с помощью формул понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\ (12), \qquad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\ (13).$$

Задача 3. Решить уравнение: $sin^2\,x + sin^2\,2x = cos^2\,3x + cos^2\,4x$.

*Решение.* Имеем:

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1 + \cos 6x}{2} + \frac{1 + \cos 8x}{2},$$ откуда

$cos2x + cos4x + cos6x + cos8x = 0$. Группируем первое слагаемое со вторым, третье с четвёртым и преобразуем сумму косинусов в произведение:

$$2\,cos3x\,cosx + 2\,cos7x\,cosx = 0 \Leftrightarrow 2\,cosx\,(cos3x + cos7x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\,cosx\,cos2x\,cos5x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} cos\,x = 0, \\ cos\,2x = 0, \\ cos\,5x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{r} x = \pi/2 + \pi k, \\ x = \pi/4 + \pi n/2, \\ x = \pi/10 + \pi n/5\ (k, n \in Z). \end{array}\right.$$

Заметим, что серия $\pi/2 + \pi k$ целиком содержится в серии $\pi/10 + \pi n/5$ (а именно, при $n = 5k + 2$ вторая серия переходит в первую).

*Ответ:* $\pi/4 + \pi n/2, \pi/10 + \pi n/5, n \in Z$.

- Применение формул двойного и тройного угла.

Чтобы пользоваться этим методом, необходимо знать основные формулы:

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ (14);

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ (15);

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ (16);

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ (17).

Задача 4. Решить уравнение $2\sin x + \cos x = 2$.

*Решение.* Применяем формулы двойных аргументов (14) и (15). Правую часть уравнения представим в виде: $2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot (\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2})$, получаем:

$4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\sin^2\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2}$. Приводим подобные и делим обе части уравнения на $\cos^2\frac{x}{2}$:

$3\sin^2\frac{x}{2} - 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 0 \quad | : \cos^2\frac{x}{2}$;

$3\,tg^2\frac{x}{2} - 4\,tg\frac{x}{2} + 1 = 0$. Производим замену переменной $tg\frac{x}{2} = y$;

$3y^2 - 4y + 1 = 0$, где

$y_1 = 1$, а $y_2 = 1/3$, возвращаемся к замене:

1) $tg\frac{x}{2} = 1, \frac{x}{2} = \pi/4 + \pi n,\ x = \pi/2 + 2\pi n, n \in Z$;

2) $tg\frac{x}{2} = 1/3, \frac{x}{2} = arctg\,1/3 + \pi n,\ x = 2arctg\,1/3 + 2\pi n, n \in Z$.

*Ответ:* $\pi/2+2\pi n, 2arctg\, 1/3+2\pi n, n \in Z$.

Задача 5. Решить уравнение: $sin\, 3x+2\, sin\, x=1$.

*Решение*. Воспользуемся формулой (16), имеем:

$3\sin x-4\, sin^2 x+2\, sin\, x=1 \Leftrightarrow 4\, sin^2 x-5\, sin\, x+1=0$.

Делаем замену $t=sin\, x$ :

$$4t^3-5t+1=0.$$

Замечаем, что $t=1$ является корнем данного уравнения, и раскладываем левую часть на множители: $(t-1)(4t^2+4t-1)=0$. В случае $t=1$ имеем:

$sin\, x=1$, то есть $x=\pi/2+2\pi k\ (k\in Z)$.

Корнями квадратного уравнения $4t^2+4t-1=0$ служат числа:

$t=\frac{-1\pm\sqrt{2}}{2}$. Получаем совокупность $\left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{-1+\sqrt{2}}{2},\\ \sin x=\frac{-1-\sqrt{2}}{2}.\end{array}\right.$

Первое уравнение совокупности даёт решения:

$x=(-1)^n\, arcsin\,\frac{\sqrt{2}-1}{2}+\pi n\ (n\in Z)$. Второе уравнение совокупности не имеет решений, поскольку $\frac{-1-\sqrt{2}}{2}<\frac{-1-1}{2}=-1$.

*Ответ*: $\pi/2+2\pi k, (-1)^n\, arcsin\,\frac{\sqrt{2}-1}{2}+\pi n\ (n, k\in Z)$.